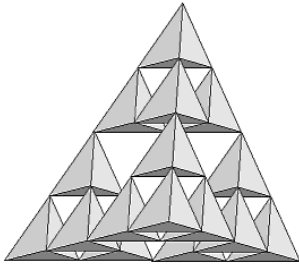


## XII Powiatowy Konkurs Matematyczny dla uczniów klas drugich szkół ponadgimnazjalnych.



W tym konkursie nie ma przegranych. To, że tu jesteś, jest już  
Twoim sukcesem. Więc „Jeśli zadanie wydaje ci się trudne, bierz się  
za niemożliwe”  
*Aleksander Wielki*

W części pierwszej znajdują się zadania testowe.

W każdej kratce, obok odpowiedzi, wpisz TAK lub NIE

W części drugiej zapisz rozwiązanie każdego zadania.

### Część I

1. **(4pkt)** Dla każdej liczby rzeczywistej  $p$  liczba
 

<input type="checkbox"/>	a) $-p$ jest ujemna
<input type="checkbox"/>	b) $p^2$ jest dodatnia
<input type="checkbox"/>	c) $p^2 - 2p + 1$ jest nieujemna
<input type="checkbox"/>	d) $ p $ jest liczbą nieujemną
2. **(4pkt)** Liczba  $2000001^2 - 1999999^2$  jest
 

<input type="checkbox"/>	a) mniejsza od 2000000
<input type="checkbox"/>	b) większa 1999999
<input type="checkbox"/>	c) równa 8000000
<input type="checkbox"/>	d) podzielna przez $2^9$
3. **(4pkt)** Dla każdej liczby rzeczywistej  $x < 0$  oraz  $y > 0$  prawdziwa jest równość
 

<input type="checkbox"/>	a) $  x  + y  =  x  +  y $
<input type="checkbox"/>	b) $- x \cdot y  = xy$
<input type="checkbox"/>	c) $\sqrt{x^2} = -x$
<input type="checkbox"/>	d) $ x - y  =  y  - x$
4. **(4pkt)** Jeżeli  $(x-y)^2 + (x+y+2)^2 = 0$  to  $xy$ 

<input type="checkbox"/>	a) jest równe 1
<input type="checkbox"/>	b) może być równe 0
<input type="checkbox"/>	c) nie da się określić
<input type="checkbox"/>	d) jest liczbą pierwszą
5. **(4pkt)** Można tak dobrać liczby  $a, b, c$ , aby rozwiązaniem nierówności  $ax^2 + bx + c \geq 0$  było
 

<input type="checkbox"/>	a) przedział liczbowy obustronnie domknięty
<input type="checkbox"/>	b) dowolny podzbiór liczb rzeczywistych
<input type="checkbox"/>	c) dowolny przedział liczbowy
<input type="checkbox"/>	d) zbiór pusty
6. **(4pkt)** Jeżeli funkcja  $f(x) = x^2 + bx + c$  przyjmuje wartości ujemne tylko na przedziale  $(1; 3)$ , to
 

<input type="checkbox"/>	a) $f(1) = 0$ i $f(3) = 0$
<input type="checkbox"/>	b) oś $OY$ może być osią symetrii wykresu tej funkcji
<input type="checkbox"/>	c) zbiorem wartości tej funkcji może być $Y = \langle -10^{-10}; \infty \rangle$
<input type="checkbox"/>	d) wartość $-\pi$ funkcja może przyjmować dwa razy
7. **(4pkt)** Równanie  $|x^2 - \sqrt{3}| = k$  może mieć w zależności od parametru  $k$ 

<input type="checkbox"/>	a) 1 rozwiązanie
<input type="checkbox"/>	b) 3 rozwiązania
<input type="checkbox"/>	c) 5 rozwiązań
<input type="checkbox"/>	d) nie mieć rozwiązań

8. (4pkt) Wielomian  $W(x) = (x^3-1)^2(x-1)^6$  jest podzielny przez

- a)  $x^2+x+1$
- b)  $(x-1)^8$
- c)  $x^6$
- d)  $x^4+x^2+1$

9. (4pkt) Równanie  $(2x-1)^2(x-3)(2-4x)(3-x)^3(x^2-9)=0$

- a) ma 3 różne rozwiązania
- b) ma 5 różnych rozwiązań
- c) jest równaniem 8 stopnia
- d) ma tylko pierwiastki całkowite

10. (4pkt) Dane jest równanie  $x^{n+2}+64=x^{n+1}+64x$ . Wynika stąd, że

- a) dla wszystkich  $n$  parzystych równanie ma 2 różne rozwiązania
- b) dla wszystkich  $n$  nieparzystych równanie ma 3 różne rozwiązania
- c) istnieje takie  $n$  dla którego równanie ma 4 różne rozwiązania
- d) istnieje takie  $n$  dla którego rozwiązaniem równania są tylko liczby  $-2, 1, 2$

11. (4pkt) Suma kątów wielokąta może być równa

- a)  $720^\circ$
- b)  $180^\circ \cdot 10^{10}$
- c)  $1060^\circ$
- d)  $1980^\circ$

12. (4pkt) Cztery jednakowe puszki w kształcie walca umieszczono ciasno na stojąco, obok siebie w okrągłym garnku. Średnica podstawy garnka wynosi 1. Więc promień puszki

a) wynosi  $\frac{\sqrt{2}-2}{2}$

b) wynosi  $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$

c) wynosi  $\frac{1}{2+2\sqrt{2}}$

d) jest większy od  $\frac{\sqrt{2}}{6}$

13. (4pkt) O funkcji  $f(x)$  wiadomo, że jej dziedziną jest zbiór  $D = \langle -3; 5 \rangle$ , zbiorem wartości  $Y = \langle -2; 4 \rangle$ , a jedynym miejscem zerowym liczba 1. Więc funkcja  $f(x-2)$

a) ma dziedzinę równą  $\langle -5; 3 \rangle$

b) ma miejsce zerowe  $x=3$

c) ma zbiór wartości  $Y = \langle -2; 4 \rangle$

d) prosta  $x=1$  może być osią symetrii jej wykresu

14. (4pkt) O funkcji  $f(x)$  wiadomo, że jej dziedziną jest zbiór  $D = \langle -3; 5 \rangle$ , zbiorem wartości  $Y = \langle -2; 4 \rangle$  a jedynym miejscem zerowym liczba 1. Więc o funkcji  $f(|x|-2)$  można powiedzieć, że

- |                          |  |
|--------------------------|--|
| <input type="checkbox"/> | a) ma dziedzinę równą $\langle -7; 7 \rangle$  |
| <input type="checkbox"/> | b) miejscami zerowymi są liczby $x=3$ i $x=-3$ |
| <input type="checkbox"/> | c) zbioru wartości nie da się określić         |
| <input type="checkbox"/> | d) oś OY jest osią symetrii wykresu            |

15. (4pkt) Częścią wspólną dwóch kwadratów może być

- |                          |  |
|--------------------------|--|
| <input type="checkbox"/> | a) trójkąt                             |
| <input type="checkbox"/> | b) czworokąt który nie ma osi symetrii |
| <input type="checkbox"/> | c) pięciokąt                           |
| <input type="checkbox"/> | d) ośmiokąt                            |

UWAGA do zad.15: w sytuacji kiedy odpowiadasz *tak* zrób rysunek potwierdzający twoją odpowiedź.

### Część II

16. (4pkt) Dana jest funkcja  $f(x)=4x+2$ . Zbuduj równanie  $f(4x)+f(x-1)-(f(x))^2+6=0$  i rozwiąż je.

17. (4pkt) Wykaż, że dla dwóch liczb  $a$  i  $b$  tego samego znaku zachodzi nierówność

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2.$$

18. (4pkt) Wykaż, że wielomian  $W(x)=(x-2)^{2m}+(x-1)^m-1$  jest podzielny przez wielomian  $P(x)=x^2-3x+2$  dla każdego  $m \in N_+$ .

19. (4pkt) W pewnym trapezie równoramiennym przekątne są prostopadłe. Oblicz pole trapezu, jeśli wiadomo, że jego wysokość jest równa  $h$ .

20. (4pkt) Oblicz zbiór wartości funkcji  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 10}$ .

21. (2pkt) Rozwiąż nierówność  $x^2 + 5x > 20$ .

22. (4pkt) Rozwiąż układ równań 
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 1 \end{cases}$$