

**XIII Powiatowy Konkurs Matematyczny**  
**dla uczniów klas drugich szkół ponadgimnazjalnych.**


W części pierwszej znajdują się zadania testowe. W każdej kratce obok odpowiedzi wpisz TAK lub NIE. W części drugiej zapisz rozwiązania zadań.

**CZĘŚĆ I**

1. (4pkt) Liczba  $|2\sqrt{2} - \pi| - |2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}| + |-5\sqrt{2}|$ 
  - a) jest równa  $-2\sqrt{2} + \pi$ .
  - b) jest równa  $4\sqrt{2} + \pi - 2\sqrt{3}$ .
  - c) jest liczbą wymierną.
  - d) jest większa od  $\pi + \sqrt{3}$ .
2. (4pkt) Liczba  $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$  jest równa
  - a)  $1 - \sqrt{3}$ .
  - b)  $2 - \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ .
  - c)  $\sqrt{3} - 1$ .
  - d)  $\frac{2}{\sqrt{3} + 1}$ .
3. (4pkt) Niech  $a > 0$  i  $b \in R$ . Wtedy zbiorem rozwiązań nierówności  $|x - b| > a$  jest
  - a)  $(-a; a)$ .
  - b)  $(-\infty; b - a) \cup (b + a; +\infty)$ .
  - c)  $(-a - b; a + b)$ .
  - d)  $(-\infty; a - b) \cup (b + a; +\infty)$ .
4. (4pkt) Liczbą podzielną przez 6 jest
  - a) liczba postaci  $n(n+1)(n+2)$  dla każdej liczby naturalnej  $n$ .
  - b) liczba postaci  $5^{n+1} + 5^n$  dla każdej liczby naturalnej  $n$ .
  - c) liczba postaci  $2^{n+1} + 2^n$  dla każdej liczby naturalnej  $n$  dodatniej.
  - d) liczba postaci  $4 \cdot 3^n$  dla każdej liczby naturalnej  $n$  nieparzystej.
5. (4pkt) O liczbie  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 29 \cdot 30$  można powiedzieć, że
  - a) po wymnożeniu kończy się siedmioma zerami.
  - b) jest podzielna przez  $7^4$ .
  - c) jest podzielna przez  $11^3$ .
  - d) jest podzielna przez  $2^{26}$ .
6. (4pkt) Wyrażenie algebraiczne  $(x - y - 4)^2$  jest równe
  - a)  $x^2 - y^2 - 16$ .
  - b)  $x^2 + y^2 + 16$ .
  - c)  $(x - y)^2 - 8(x - y) + 16$ .
  - d)  $x^2 - 2(y - 4)^2 + (y - 4)^2$ .
7. (4pkt) Wyrażenie  $x^8 - 16$  można zapisać w postaci
  - a)  $(x^4 - 8)(x^4 + 8)$ .
  - b)  $(x^4 - 4)(x^4 + 4)$ .
  - c)  $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 2)(x^4 + 4)$ .
  - d)  $(x^2 - 2)(x^6 + 8)$ .

8. (4pkt) Dana jest funkcja  $f(x) = x^2 + 4x$ .
- Wykresem jest parabola o wierzchołku w punkcie (0,4).
  - Funkcja ma jedno miejsce zerowe.
  - Funkcja rośnie w przedziale  $\langle -4; +\infty \rangle$ .
  - Zbiorem wartości funkcji jest przedział  $\langle -4; +\infty \rangle$ .
9. (4pkt) Dany jest wielomian  $W(x) = (x^2 + 2x - 4)^{50}$ .
- Stopień wielomianu wynosi 52.
  - Wielomian ma dwa pierwiastki rzeczywiste.
  - Suma współczynników wielomianu wynosi 1.
  - Wielomian nie przyjmuje wartości  $\pi$ .
10. (4pkt) Rozwiązaniem nierówności są wszystkie liczby rzeczywiste
- $x^2 + x < 0$
  - $-x^2 - 1 \leq 0$
  - $x^2 - x + 1 > 0$
  - $\pi x^2 - 2\pi x + 3,14 \geq 0$
11. (4pkt) Prawdą jest, że
- Istnieje wielomian piątego stopnia, który ma 6 pierwiastków rzeczywistych.
  - Każdy wielomian nieparzystego stopnia ma co najmniej jeden pierwiastek rzeczywisty.
  - Każdy wielomian można rozłożyć na czynniki liniowe.
  - Wielomian, który można zapisać w postaci iloczynowej ma zawsze pierwiastki rzeczywiste.
12. (4pkt) Nieprawdą jest, że
- Każde dwa okręgi są podobne
  - Każde dwa trójkąty równoramienne są podobne.
  - Każde dwa trapezy prostokątne są podobne.
  - Trójkąty o bokach  $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$  i  $2, \sqrt{2}, \sqrt{6}$  są podobne.
13. (4pkt) Obwód równoległoboku wynosi 72, stosunek jego wysokości wynosi 5:7, zaś stosunek miar jego kątów wewnętrznych jest równy 1:2, więc.
- Krótsza przekątna tego równoległoboku dzieli go na dwa trójkąty równoboczne.
  - Stosunek długości podstaw wynosi 7:5 lub 5:7.
  - Długości boków wynoszą 14 i 22.
  - W ten równoległobok można wpisać okrąg.
14. Jeśli  $\sin \alpha = \frac{3}{4}$ , to
- $\cos \alpha = \frac{1}{4}$ .
  - $\cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$ .
  - $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3\sqrt{7}}{7}$ .
  - $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{\sqrt{7}}$ .
15. (4pkt) W dowolnym trójkącie wszystkie trzy
- symetralne boków przecinają się w jednym punkcie.
  - dwusieczne kątów przecinają się w jednym punkcie.
  - środkowe przecinają się w jednym punkcie.
  - proste w których zawarte są wysokości przecinają się w jednym punkcie.

## CZĘŚĆ II

16. (4pkt) Wiedząc, że  $f(x) = 3x - 4$  utwórz, a następnie rozwiąż równanie  
$$f(2x) - f(x-1) = (f(x))^2 - 13.$$
17. (4pkt) Liczba  $x$  przy dzieleniu przez 4 daje resztę 1, zaś liczba  $y$  przy dzieleniu przez 4 daje resztę 3. Wyznacz resztę z dzielenia przez 8 liczby  $x^2 + y^2$ .
18. (6pkt) Między liczbami  $x$  i  $y$  zachodzi zależność  $xy = 3y + 4$ . Wyznacz z tej zależności  $y$  i narysuj wykres otrzymanej funkcji. Wypisz wszystkie pary liczb  $(x, y)$  będące liczbami całkowitymi i spełniające podaną zależność. Uzasadnij, że nie ma ich więcej od wypisanych przez ciebie.
19. (3pkt) Oblicz sumę kwadratów pierwiastków równania  $2x^2 - 6x + 3 = 0$ .
20. (3pkt) W trójkącie prostokątnym dane są dwie środkowe o długościach 3 i 4 wychodzące z wierzchołków kątów ostrych. (przypominamy: środkową w trójkącie nazywamy odcinek łączący wierzchołek ze środkiem przeciwległego boku). Oblicz długość przeciwprostokątnej tego trójkąta. Zrób rysunek do zadania.
21. (4pkt) We wnętrzu trójkąta równobocznego zaznaczono pewien punkt  $P$ . Zmierzone jego odległości od wszystkich trzech boków trójkąta, otrzymując kolejno liczby:  
 $2\sqrt{3}, 4\sqrt{3}$  i  $8\sqrt{3}$ . Zrób rysunek, zaznacz na nim punkt  $P$  i podane odległości i oblicz pole trójkąta.
22. (3pkt) Z dużego półkola wycięto mniejsze półkole (patrz rysunek) dorysowano cięciwę o długości 20, styczną do małego półkola i równoległą do średnicy dużego półkola. Oblicz pole obszaru jaki zostaje po wycięciu małego półkola z dużego półkola.
- 
23. (3pkt) Trapez ma podstawy o długościach  $a$  i  $b$ . Oblicz długość odcinka równoległego do podstaw, który dzieli ten trapez na dwie figury o równych polach.