

II Powiatowy Konkurs Matematyczny dla uczniów klas pierwszych szkół ponadgimnazjalnych

Numer kodowy

W tym konkursie nie ma przegranych. To że tu jesteś jest już Twoim sukcesem.
Więc „Jeśli zadanie wydaje ci się trudne, bierz się za niemożliwe”
Aleksander Wielki

W części I masz zadania testowe, gdzie zakreślasz prawidłową odpowiedź (niekoniecznie jedną). W części II podajesz prawidłowe odpowiedzi. W części III zapisujesz rozwiązania zadań. Czas pracy 120 minut.

Część I

(wolne miejsce wykorzystaj na obliczenia)

Zadanie 1 (1 pkt)

Różnica $\sqrt{32} - \sqrt{2}$ jest równa liczbie:

- a) $\sqrt{30}$
- b) $\sqrt{18}$
- c) $2\sqrt{2}$
- d) 2

Zadanie 2 (1 pkt)

Liczba 0,323232... jest:

- a) niewymierna
- b) wymierna
- c) mniejsza od $\frac{1}{3}$
- d) większa od 0,3

Zadanie 3 (1 pkt)

Dane są dwa kwadraty: o boku a i polu P_1 oraz o boku b i polu P_2 . Pole P_2 stanowi 16% pola P_1 .

Prawdą jest, że bok b stanowi:

- a) 8% boku a
- b) 32% boku a
- c) 16% boku a
- d) 40% boku a

Zadanie 4 (1 pkt)

Cenę pewnego towaru obniżono o 20%, a następnie podwyższono o 25%. Jak zmieniła się cena towaru w stosunku do wyjściowej?

- a) Zwiększyła się o 5%
- b) Zmniejszyła się o 5%
- c) Zwiększyła się o 2,5%
- d) Nie zmieniła się

Zadanie 5 (1 pkt)

Dane są zbiory $A=(-\infty;4)$, $B=(-4;0)$, $C=(0,+\infty)$. Zachodzi równość:

- a) $A \cap B \cap C = B$
- b) $B' \cup A = \mathbb{R}$
- c) $A \cap C' = A$
- d) $B' \cap C = \emptyset$

Zadanie 6 (1 pkt)

Wyrażenie $\sqrt{x^2 - 6x + 9}$ jest równe wyrażeniu:

- a) $x-3$
- b) $3-x$
- c) $|3-x|$
- d) $|x-3|$

Zadanie 7 (1 pkt)

W okręgu o promieniu 10 cięciwa ma długość 8. Odległość środka okręgu od cięciwy jest równa:

- a) $\sqrt{84}$
- b) 6
- c) $2\sqrt{21}$
- d) $4\sqrt{21}$

Zadanie 8 (1 pkt)

Dane są funkcje $f(x)=x-4$ oraz $g(x)=12x-3$ określone na zbiorze R . Rozwiązaniem równania

$$4f(x)-g\left(\frac{x}{3}\right)=0$$
 jest:

- a) liczba naturalna
- b) liczba ujemna
- c) zbiór pusty
- d) zbiór dwuelementowy

Część II

Zadanie 9 (3 pkt)

Wiedząc, że implikacja jest fałszywa odpowiedz na pytania

- a) jeśli Jan ma syna, to Jan ma córkę. Czy pan Jan ma syna czy córkę

Odp. Jan ma.....

- b) jeśli Ola nie uczy się w liceum, to uczy się w gimnazjum. Czy Ola uczy się w gimnazjum lub liceum?

Odp. Ola.....

- c) jeśli pan Jan nie ma samochodu, to nie ma roweru. Który z pośród środków lokomocji ma pan Jan?

Odp. Pan Jan ma.....

Zadanie 10 (5 pkt)

Spośród liczb wybierz te, które są całkowite:

$$a = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} - 2\sqrt{6} =$$

$$b = \frac{5^5 - 5^4 + 5^3}{7} =$$

$$c = \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} - \sqrt{3} =$$

$$d = (a - \sqrt{b})(2a + 2\sqrt{b}) = \text{gdzie } a, b \in \mathbb{N}$$

$$e = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{-2}\right)^3 + \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{-2}\right)^3 - \left[\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{-2}\right)^2 + \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{-2}\right)^2\right] =$$

[wiedząc, że $(a+b)^3 = a^3 + 3ab^2 + 3a^2b + b^3$; $(a-b)^3 = a^3 + 3ab^2 - 3a^2b - b^3$]

Odp......

Zadanie 11 (3 pkt)

Uzupełnij dowód poniższego twierdzenia

Twierdzenie Suma dwóch funkcji nieparzystych jest funkcją nieparzystą

Dowód: Załóżmy, że funkcje $f : D_f \rightarrow Y$ oraz $g : D_g \rightarrow Y$ są nieparzyste. Wobec tego zachodzą

1) $\bigwedge_{x \in D_f} -x \in D_f$ oraz 2) $\bigwedge_{x \in D_f} f(-x) = -f(x)$ Podobnie dla funkcji g : (1) $\bigwedge_{x \in D_g} -x \in D_g$

oraz 2) $\bigwedge_{x \in D_g} g(-x) = -g(x)$

Chcemy wykazać, że $(g+f)(-x) = -(g+f)(x)$

Mamy $(g+f)(-x) = g(-x) + f(-x) = -g(x) - f(x) = -(g+f)(x)$.

Wobec czego udowodniliśmy, że.....

Część III

Zadanie 12(4pkt)

Znajdź funkcję liniową g , która dla $x \in \mathbb{R}$ spełnia następujące warunki:

$$g(-5x) = -5g(x) + 24 \quad \text{oraz} \quad g(x-1) = 4 + g(x)$$

Rozwiązanie:

.

Zadanie 13 (6 pkt)

- a) Wiedząc, że $\max(a,b) = \begin{cases} a & \text{dla } a \geq b \\ b & \text{dla } a < b \end{cases}$ narysuj wykres funkcji $f(x) = \max(2, x)$ gdy $x \in \langle 0; 4 \rangle$.
Określ monotoniczność funkcji f

- b) narysuj wykres funkcji $f(x) = \frac{x^2}{|x|}$ dla $x \in \langle -1; 0 \rangle \cup \langle 0; 1 \rangle$. Podaj zbiór wartości
Y=.....

Zadanie14(4pk)

Wyznacz te elementy zbioru $A = \{x \in N, y \in N : |2x - 1| < 5 \text{ i } |2 - y| > 1\}$ które spełniają równanie $y = x + 2$

Zadanie 15 (4 pkt)

Wykaż, że jeśli $k = -5$ to równanie $|x + 4| + |x + k| = 2x - 1$ ma nieskończenie wiele rozwiązań

Zadanie 16 (3pkt)

Zagadka:

„Przewodniczyłem zebraniu Klubu Sportowego, w czasie którego część uczestników opuściła salę. Gdybym i ja wyszedł na sali zostałyby zaledwie jedna trzecia uczestników.– Tak – powiedział jeden z moich kolegów – ale gdyby na sali zostali Janek i Tomek utracilibyśmy tylko połowę uczestników.”
Ile osób uczestniczyło na początku w zebraniu? Odpowiedź uzasadnij