IV Powiatowy Konkurs Matematyczny
dla uczniów klas pierwszych szkół ponadgimnazjalnych

20 kwietnia 2006

	Część I								Część II			Część III			Razem
Zadania	1 (1p)	2 (1p)	3 (1p)	4 (1p)	5 (1p)	6 (1p)	7 (1p)	8 (1p)	9(3p)	10(3p)	11(3p)	12(7p)	13(4p)	14(4p)	32pkt
Punkty															

Numer kodowy

W tym konkursie nie ma przegranych. To, że tu jesteś, jest już Twoim sukcesem.
Więc „*Jeśli zadanie wydaje ci się trudne, bierz się za niemożliwe*”
Aleksander Wielki

W **części I** masz zadania testowe, gdzie zaznaczasz prawidłową odpowiedź (niekoniecznie jedną).

W **części II** podajesz prawidłowe odpowiedzi.

W **części III** zapisujesz rozwiązania zadań. ***Życzymy powodzenia!***

Czas pracy 120 minut.

Część I (wolne miejsce wykorzystaj na obliczenia)

<u>Zadanie 1</u> (1 pkt)

Oblicz $\left(\frac{1}{2}\right)^{7} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-10} \cdot 2^{-5}$. Czy otrzymałeś wynik równy:

☐ **a)** $\frac{1}{8}$

☐ **b)** $\left(\frac{1}{2}\right)^{2}$

☐ **c)** 2^{-2} ?

<u>Zadanie 2</u> (1 pkt)

Jakie jest pole figury ograniczonej osią x i wykresami funkcji $y = x + 2$ i $y = -x + 2$.

☐ **a)** 6

☐ **b)** 4

☐ **c)** 3

<u>Zadanie 3</u> (1 pkt)

Dane są zbiory $A = \{x \in R : |x-5| \le 5\}$, $B = \{x \in R : x \ge 5 \wedge 3x - 6 \le 4\}$.
Które z podanych zdań jest prawdziwe ?

☐ **a)** $A \cap B = B$

☐ **b)** $A \setminus B = \langle 0; 2\rangle \cup \langle 3\tfrac{1}{2}; 10\rangle$

☐ **c)** $B \setminus A = \varnothing$

Zadanie 4 (1 pkt)

Wyznacz wszystkie wartości x, dla których wyrażenie $\sqrt{x+2}-\sqrt{4-x}$ ma sens liczbowy.

☐ **a)** $-4 \le x \le -2$

☐ **b)** $x \ge -2$

☐ **c)** $-2 \le x \le 4$

Zadanie 5 (1 pkt)

Niech $x = \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$. Zaznacz zdanie prawdziwe:

☐ **a)** liczbą przeciwną do *x* jest $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$

☐ **b)** liczbą odwrotną do *x* jest $-\dfrac{3}{2}\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}\sqrt{30}$

☐ **c)** liczba *x* jest wymierna

Zadanie 6 (1 pkt)

Jeżeli $a \otimes b = ab + a + b$ i $3 \otimes 5 = 2 \otimes x$, to x równa się:

☐ **a)** 4

☐ **b)** 7

☐ **c)** $3\frac{2}{3}$

Zadanie 7 (1 pkt)

Równoważność $p \Leftrightarrow q$ jest prawdziwa. Wówczas prawdziwe jest zdanie:

☐ **a)** $p \vee \sim q$

☐ **b)** $p \Rightarrow q$

☐ **c)** $p \wedge q$

Zadanie 8 (1 pkt)

Ojciec w wieku 50 lat posiada córkę i syna. Syn jest o 4 lata starszy od swojej siostry. Za osiem lat wiek ojca będzie równy sumie lat jego dwojga dzieci. Zatem:

☐ **a)** syn ma 23 lata

☐ **b)** syn ma 19 lat

☐ **c)** córka ma 19 lat

Część II

Zadanie 9 (3 pkt)

Aby rozwiązać równanie (x +1)(y –2) = 2 w liczbach całkowitych można postąpić następująco:
Przekształcamy równanie do postaci równoważnej:
(x +1)(y –2) = 2

$$x+1=\frac{2}{y-2}$$

$$x=\frac{2}{y-2}-1$$

Aby liczba x∈ C mianownik (y–2) musi być dzielnikiem liczby 2, czyli (y–2)∈{ –1, 1, –2, 2}.
Wobec tego:
y–2 = –1 lub y–2 =1 lub y–2 =–2 lub y–2 =2.
Zatem rozwiązaniem równania są cztery pary liczb:

$$\begin{cases} x=-3 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases} \vee \begin{cases} x=0 \\ y=4 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-2 \\ y=0 \end{cases}$$

Postępując analogicznie rozwiąż w liczbach całkowitych równanie (x–1)(y–2)=3.

Zadanie 10 (3 pkt)

Wykazać, że funkcja $f(x)=\frac{2x-1}{x}$, gdzie $x \neq 0$ jest różnowartościowa.

Uzupełnij poniższy dowód:

> **Przypomnij sobie!**
> **Funkcję f nazywamy różnowartościową w zbiorze A , gdy dla dowolnych argumentów x_1, x_2 należących do zbioru A zachodzi warunek: jeśli $f(x_1)= f(x_2)$, to $x_1=x_2$**

Weźmy $x_1, x_2 \in D_f$. Załóżmy, że ……………………

Pokażemy, że ………………

Niech $f(x_1)=$ …………… oraz $f(x_2)=$ ……………..

Zatem z faktu, że $f(x_1)= f(x_2)$ wynika …………………….…………

Przekształcając wyrażenie otrzymujemy:

……………………………………………………………..…………

……………………………………………………………..…………

Ostatecznie otrzymujemy: …………………

Wobec czego pokazaliśmy, że funkcja $f(x)= \frac{2x-1}{x}$ jest różnowartościowa.

Zadanie 11 (3 pkt)

Przeczytaj poniższy tekst:

Tales z Miletu (ok. 620- 540 p.n.e.) był greckim filozofem, matematykiem oraz astronomem. Założył jońską szkołę filozofii przyrody. Do szkoły Talesa należeli uczniowie Anaksymenes i Anaksymander. Jońska szkoła jako pierwsza w dziejach historii zajęła się geometrią. Tales wykazał m.in., że średnica dzieli okrąg na połowy. Udowodnił także, że kąt wpisany oparty na półokręgu ma miarę 90 stopni.

Oceń wartość logiczną zdań:

a) Tales z Miletu był filozofem lub astronomem.

……………………………………….………………

b) Jeżeli Anaksymenes nie był uczniem szkoły jońskiej, to Anaksymander był uczniem tejże szkoły.

………………………………………………………..

c) Fakt, iż średnica nie dzieli okręgu na połowy jest równoważny faktowi, że Talesowi nie udało się udowodnić, że kąt wpisany oparty na półokręgu jest prosty.

……………………………………………………….

Część III

Zadanie 12 (**a** – 5 pkt , **b** –2 pkt)

a) Narysuj wykres funkcji określonej wzorem f(x)=$\frac{|x|}{x}(x+1)$. Przedyskutuj liczbę rozwiązań równania f(x) = *m* w zależności od wartości parametru *m*.

b) Narysuj wykres funkcji określonej wzorem f(x)=$\left[\,|x|\,\right]$, gdzie x∈$\langle -5; 5\rangle$.

Wskazówka:

[x] oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od x (np. [0,2]=0, [1,8]=1, [−3,2]= −4, [−6]= −6)

Zadanie 13 (4 pkt)

Każda dostawa żywności do szkolnej stołówki wystarcza na 14 dni, gdy stołują się wszyscy, którzy to zadeklarowali. W maju korzystało ze stołówki o 15 osób mniej niż wynikało to z deklaracji i wtedy starczyło żywności z dostawy na 21 dni. W czerwcu, po odejściu klas maturalnych, korzystało ze stołówki o 40% mniej w stosunku do liczby zadeklarowanych. Na ile pełnych dni czerwca starczy jednorazowa dostawa?

Zadanie 14 (4 pkt)

Oblicz, jaka powinna być najmniejsza średnica garnka, aby zmieściły się w nim (jeden obok drugiego) cztery słoiki, każdy o średnicy *d*.

BRUDNOPIS