Wodzisław Śl. 29.04.2015

XIII Powiatowy Konkurs Matematyczny
dla uczniów klas pierwszych szkół ponadgimnazjalnych.
CZĘŚĆ I

1. (4pkt)Liczba $\sqrt{3^{100}}$ jest równa
   a) $\sqrt{3}^{10}$
   b) 3^{10}
   c) 9^{25}
   d) $\sqrt{81} \cdot 81^{12}$
2. (4pkt) Rozważmy dwie funkcje *f* i *g* określone dla każdej liczby rzeczywistej *x*, takie że $g(x) = xf(x)$. Prawdą jest
   a) jeśli funkcja *f* jest liniowa, to funkcja *g* nie jest liniowa.
   b) funkcja *g* ma przynajmniej jedno miejsce zerowe.
   c) jeśli $f(x) = -4$, to $g(4) = 16$.
   d) *P(0,0)* jest punktem przecięcia funkcji *g* z osią OY.
3. (4pkt) Prawdą jest
   a) jeśli $x < 0$, to $|x| = -x$.
   b) jeśli $x < 1$, to $x^2 < 1$.
   c) jeśli $x^2 > 0$, to $x > 0$.
   d) jeśli $|x| > 0$, to $x \neq 0$.
4. (4pkt) Wyrażenie $4x^2 - (4x-1)^2$ jest równe
   a) $12(0{,}5 - x)(x - \frac{1}{6})$.
   b) $(2x-1)(6x-1)$.
   c) $-12x^2 + 8x - 1$.
   d) $-12x^2 + 1$.
5. (4pkt) Każdej liczbie naturalnej dwucyfrowej przyporządkowujemy sumę jej cyfr, więc
   a) do dziedziny tej funkcji należy 89 liczb.
   b) zbiorem wartości jest zbiór $\{1, 2, 3, \ldots ,17, 18\}$.
   c) jest to funkcja rosnąca.
   d) funkcja ma jedno miejsce zerowe.
6. (4pkt) Suma pewnych pięciu kolejnych liczb całkowitych jest równa sumie następnych trzech kolejnych liczb całkowitych. Zatem:
   a) Największa z tych ośmiu liczb jest równa 11.
   b) Najmniejsza z tych ośmiu liczb to 3.
   c) Największa z tych ośmiu liczb jest liczbą pierwszą.
   d) Najmniejsza z tych ośmiu liczb jest kwadratem liczby pierwszej.
7. (4pkt) Dana jest funkcja $f(x) = \frac{x + m}{x^2 - m}$.
   a) Dla $m < 0$ dziedziną funkcji *f* jest zbiór R.
   b) Dla każdego $m \in R$ funkcja *f* ma jedno miejsce zerowe $x = -m$.
   c) Dla każdego $m \in R$ wykres funkcji *f* przecina oś y w punkcie $(0, -1)$.
   d) Dla $m = \sqrt{2}$, $f(1) = -3 - 2\sqrt{2}$.
8. (4pkt) Dane są funkcje $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 9}$ i $g(x) = x + 3$.
   a) $\frac{f(x)}{g(x)} = 1$ dla $x > -3$.
   b) wykresem funkcji *f* jest parabola.
   c) $f(x) = -g(x) \quad dla \quad x \leq -3$.
   d) Funkcje *f* i *g* są równe.

9. (4pkt) Niech N - oznacza zbiór liczb naturalnych, C - oznacza zbiór liczb całkowitych, W- zbiór liczb wymiernych, NW - zbiór liczb niewymiernych, C_+- zbiór liczb całkowitych dodatnich, C_- - zbiór liczb całkowitych ujemnych i $\varnothing$- zbiór pusty. Prawdziwe są następujące równości:
   a) $C \cup N = W$
   b) $N \cap NW = \varnothing$
   c) $(N \cap W) \cup (C \cap NW) = N$
   d) $C_+ \cup C_- = C$
10. (4pkt) Wiadomo, że $NWD(12, n) = 6$ oraz $NWW(12, m) = 24$ (n oraz m oznacza liczby naturalne dodatnie) . W takim razie:
   a) liczba n musi być parzysta
   b) liczba m musi się równać 24
   c) liczba n musi być nieparzystą wielokrotnością liczby 6.
   d) liczba m może być kwadratem liczby naturalnej.
11. (4pkt) Równanie jest sprzeczne dla każdej liczby ujemnej m.
   a) $x^2 = m$
   b) $|x| = m$
   c) $2^x = m$
   d) $\sqrt{x} = m$
12. (4pkt) Cena pewnego towaru, oznaczmy ją x, ulegała zmianom. Na początku cena została podniesiona o 10%, potem nową cenę znów podniesiono o 10%, więc
   a) po pierwszej zmianie cenę można oznaczyć $x + 10\%$.
   b) po dwóch zmianach cenę można oznaczyć $1{,}2x$.
   c) po dwóch zmianach cenę można oznaczyć $1{,}21x$.
   d) aby wrócić do początkowej ceny, trzeba cenę pod dwóch podwyżkach obniżyć o 21%.
13. (4pkt) Dany jest przedział $\langle -2; \pi \rangle$,
   a) do tego przedziału należy 5 liczb całkowitych.
   b) do tego przedziału należy nieskończenie wiele liczb wymiernych.
   c) do tego przedziału należy liczba odwrotna do π .
   d) liczba jednakowo odległa od końców przedziału to $\frac{1}{2}\pi - 1$.
14. (4pkt) Pole trójkąta o bokach a, b, c można policzyć ze wzoru $P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, gdzie mała literka p oznacza połowę obwodu. (wzór ten nazywa się wzorem Herona) Trójkąt ma boki o długościach 4, 5, 7. Wobec tego
   a) pole trójkąta wynosi $4\sqrt{6}$.
   b) najdłuższa wysokość jest równa $2\sqrt{6}$.
   c) trójkąt jest prostokątny.
   d) środek okręgu opisanego na tym trójkącie leży na zewnątrz trójkąta.
15. (4pkt) Obwód trapezu równoramiennego wynosi 50, a podstawy mają długość 10 i 20.
   a) wysokość trapezu ma długość $5\sqrt{2}$.
   b) odcinek łączący środki ramion trapezu ma długość 15.
   c) odcinek łączący środki ramion trapezu dzieli trapez na dwa trapezy do siebie podobne.
   d) przekątna trapezu ma długość $10\sqrt{3}$.

CZĘŚĆ II

16. (6pkt) Określ miejsca zerowe podanych funkcji (o ile istnieją). Funkcjom zapisanym za pomocą wzorów od 1) do 6), przyporządkuj odpowiednio zdania od a) do d).

1) $y=\frac{\sqrt{x+2}}{x+2}$	2) $y=\frac{x^2-4}{x-2}$	3) $y=\frac{x-2}{\sqrt{x+2}}$
4) $y=x^2+4$	5) $y=\sqrt{x+2}\cdot\sqrt{x-2}$	6) $y=\frac{x^2-4}{x^2+4}$

a) Miejscem zerowym funkcji jest tylko liczba 2.

b) Miejscem zerowym funkcji jest tylko liczba -2.

c) Funkcja nie ma miejsc zerowych.

d) Funkcja ma dwa miejsca zerowe: -2 oraz 2.

Odpowiedź:	1) – ...	2) – ...	3) – ...	4) – ...	5) – ...	6) – ...

17. (8pkt) Dana jest funkcja liniowa $f(x)=(2-4m)x-m+2$. Dla jakiej wartości liczby m
    a) funkcja jest rosnąca?
    b) liczba 1 jest miejscem zerowym tej funkcji?
    c) wykres nie przechodzi przez trzecią ćwiartkę układu współrzędnych?
    d) wykres danej funkcji przecina się z prostą o równaniu $2x+2y+1=0$ na osi OY?
18. (3pkt) Oblicz wartość wyrażenia $\frac{2^2-1}{2+1}+\frac{3^2-2^2}{3+2}+\frac{4^2-3^2}{4+3}+\ldots+\frac{2015^2-2014^2}{2015+2014}$.
19. (3pkt) Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie naturalnej liczbę dzielników, które są liczbami pierwszymi. Oblicz
    a) $f(36)-f(105)$.
    b) $f(2n)$, wiedząc, że n jest liczbą pierwszą różną od 2.
    c) $f(n^3)$ wiedząc, że n jest liczbą pierwszą.
20. (4pkt)Wykaż, że obie liczby $a=2^{n+2}+2^{n+1}+2^n$ oraz $b=2^{2n+2}+4^{n+2}+8^{\frac{2}{3}n+1}$ są podzielne przez 7.
21. (2pkt) Udowodnij, że jeśli a > 0 i b > 0, to $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geq 4$.
22. (4pkt) Złotnik miał dwa stopy złota ze srebrem. W pierwszym stopie stosunek masy złota do srebra wynosił 2 : 3, a w drugim 3 : 7. Oblicz, ile musi wziąć każdego z tych stopów, aby otrzymać 8 kg nowego stopu, w którym stosunek masy złota do srebra wynosiłby 5 : 11.