III Powiatowy Konkurs Matematyczny
dla uczniów klas pierwszych szkół ponadgimnazjalnych

	Część I									Część II			Część III			Razem
Zadania	1 (1p)	2 (1p)	3 (1p)	4 (1p)	5 (1p)	6 (1p)	7 (1p)	8 (1p)	9 (1p)	10(6p)	11(3p)	12(3p)	13(4p)	14(4p)	15(5p)	34 pkt
Punkty																

Numer kodowy

W tym konkursie nie ma przegranych. To, że tu jesteś, jest już Twoim sukcesem.
Więc „*Jeśli zadanie wydaje ci się trudne, bierz się za niemożliwe*”
Aleksander Wielki

W **części I** masz zadania testowe, gdzie zaznaczasz prawidłową odpowiedź (niekoniecznie jedną).
W **części II** podajesz prawidłowe odpowiedzi.
W **części III** zapisujesz rozwiązania zadań.

Życzymy powodzenia!

Czas pracy 120 minut.

Część I (wolne miejsce wykorzystaj na obliczenia)

Zadanie 1 (1 pkt)

Dane są liczby $x = 2 + \sqrt{3}$, $y = 2 - \sqrt{3}$. Ilorazem $\frac{x}{y}$ tych liczb jest:

☐ a) liczba niewymierna

☐ b) 1

☐ c) $7 + 4\sqrt{3}$

Zadanie 2 (1 pkt)

Jesienią zgromadzono 100kg ogórków, które zawierały 99% wody. Po pewnym czasie woda stanowiła 98%. Ile wówczas ważyły ogórki?

☐ a) $98\frac{98}{99}$ kg

☐ b) około 1,02 kg

☐ c) 50 kg

Zadanie 3 (1 pkt)

Suma dwóch liczb pierwszych:

☐ a) jest podzielna przez 2

☐ b) jest zawsze liczbą pierwszą

☐ c) może być liczbą pierwszą

Zadanie 4 (1 pkt)

Nierówność $|5 - x| + 1 < 0$:

☐ a) ma nieskończenie wiele rozwiązań

☐ b) nie ma rozwiązań

☐ c) ma jedno rozwiązanie

Zadanie 5 (1 pkt)

Dane są zbiory $A = \{x \in R: (x+6)^2 \leq x^2\}$ oraz $B = (-5; -3)$. Które z podanych zdań jest prawdziwe?

☐ a) $A \setminus B = (-\infty; -5\rangle$

☐ b) $(A \cap B) \cap C = \{-4\}$

☐ c) $A \cup B = (-\infty; -3\rangle$

Zadanie 6 (1 pkt)

O ile powiększy się obwód koła o promieniu 100 cm, jeżeli promień koła powiększymy o $\frac{10}{\pi}$ cm ?

☐ a) o 20 cm

☐ b) o π cm

☐ c) o 10 cm

Zadanie 7 (1 pkt)

Promień okręgu opisanego na trójkącie równobocznym ma długość $8\sqrt{3}$. Jaka jest długość boku trójkąta?

☐ a) $16\sqrt{3}$

☐ b) 24

☐ c) 48

Zadanie 8 (1 pkt)

Funkcje f i g spełniają warunek $f(x)= g(x) - g(-x)$. Ponadto funkcja g jest nieparzysta. Która z tożsamości jest prawdziwa?

☐ a) $f(-x) = -2g(x)$

☐ b) $f(-2x) + f(-x) + f(x) + f(2x) = 0$

☐ c) $f(-x) - f(x) = 0$

Zadanie 9 (1 pkt)

Dwaj chłopcy wypłynęli kajakiem z przystani w dół rzeki. Jak daleko mogą popłynąć, by wrócić po 3 godzinach, jeżeli na stojącej wodzie mogą płynąć z prędkością $v = 6\frac{km}{h}$, a prędkość prądu wynosi $2\frac{km}{h}$?

☐ a) 8 km

☐ b) 9 km

☐ c) 12 km

Część II

Zadanie 10 (6 pkt)

Oceń wartość logiczną zdań składowych oraz zdania złożonego:

a) $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[6]{4}$ jest liczbą pierwszą $\Rightarrow$ (8:2·4=1)

....

Odpowiedź: Zdanie jest ....

b) $\frac{25^{-2}}{5^{-4}}-\left(\frac{3}{5}\right)^{-6}\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{-7}+\frac{3}{5}=1$ **i** liczba (–2) nie jest rozwiązaniem równania $|3x+4|=x$

....

Odpowiedź: Zdanie jest ....

c) nie istnieje trapez będący kwadratem **lub** odcinek ma dwie osie symetrii

....

Odpowiedź: Zdanie jest ....

d) $\sqrt{-4}=-2 \Leftrightarrow 5:0=0$

....

Odpowiedź: Zdanie jest ....

Zadanie 11 (3 pkt)

Przypomnij sobie !
Funkcję f nazywamy rosnącą w zbiorze A, gdy dla dowolnych argumentów x_1 i x_2 należących do zbioru A spełniony jest warunek: jeśli $x_1 < x_2$, to $f(x_1) < f(x_2)$.

Wykazać, że f(x) = $2x^2$ jest funkcją rosnącą dla $x \in R_+$

Uzupełnij poniższy dowód.

Weźmy $x_1 \in R_+$, $x_2 \in R_+$. *Niech* .... < .... *(*)*.

Zbadamy znak różnicy $f(x_1) - f(x_2)$.

$f(x_1) =$ .... , $f(x_2) =$ ....

$f(x_1) - f(x_2) =$ .... $= 2\cdot\left(x_1^2 - x_2^2\right) =$ ....

Wobec założenia (*) różnica $x_1 - x_2$ .... 0 . *Ponieważ* $x_1, x_2 \in R_+$, *więc* $x_1 + x_2$ .... 0 .

Iloczyn liczby .... *i* .... *jest liczbą* ....

Zatem $f(x_1) - f(x_2)$ .... 0, *czyli* $f(x_1)$ .... $f(x_2)$

Funkcja $f(x)=2x^2$ *jest rosnąca dla* $x \in R_+$.

Zadanie 12 (3 pkt)

W systemie dziesiątkowym każdą liczbę naturalną można zapisać przy użyciu dziesięciu znaków, czyli cyfr: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Wiadomo, że: $156 = 6 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^2$.

Symbol $1011_{(2)}$ *oznacza liczbę zapisaną w systemie dwójkowym (tylko przy użyciu dwóch cyfr: 0, 1).*

Wartość tej liczby w systemie dziesiątkowym wynosi: $1101_{(2)} = 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 = 13$.

Pewien podróżnik zapisał w swoim notatniku: „Wyruszyłem w podróż dnia $201_{(3)}$ lipca $113302_{(4)}$ roku”. Napisz liczby z tej notatki w systemie dziesiątkowym.

Odpowiedź: Podróżnik wyruszył dnia .... lipca .... roku.

Część III

Zadanie 13 (4pkt)

Sporządź wykres funkcji określonej wzorem $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1} - x$.

Zadanie 14 (4 pkt)

W pewnym mieście mieszka 1000 rodzin. Statystyka wykazuje, że 470 z nich prenumeruje „Komputer Świat", 420 – „Wprost", a 315 – „Auto Świat", w tym 140 prenumeruje zarówno „Wprost" jak i „Auto Świat", 220 – „Auto Świat" i „Komputer Świat", 110 –zarówno „Komputer Świat" i „Wprost", a 75 prenumeruje wszystkie trzy pisma. Ile rodzin:
a) nie prenumeruje żadnego z tych czasopism,
b) prenumeruje dokładnie jedno czasopismo,
c) prenumeruje dokładnie dwa czasopisma.

Zadanie 15 (5 pkt)

W prostokątnym rogu placu zabaw stoi przysunięta do ścian beczka o średnicy 2R. Za beczkę wpadła dzieciom piłka. Oblicz dopuszczalnie maksymalną objętość tej piłki.

Przypomnij sobie !
V= $\frac{4}{3}\pi R^3$

BRUDNOPIS