

VIII Powiatowy Konkurs Matematyczny dla uczniów klas drugich szkół ponadgimnazjalnych.

Część I

W części pierwszej znajdują się zadania testowe. W każdej kratce obok odpowiedzi wpisz TAK lub NIE.

1. (3pkt) Pierwiastki x_1 i x_2 równania $-x^2 + 5x - 6 = 0$

- a) są liczbami pierwszymi
- b) spełniają nierówność $|x_1 - x_2| < 1$
- c) spełniają zależność $5^{x_1} + 5^{x_2} = 2^2 \cdot 3 \cdot 11^2$

2. (3pkt) Wielomian $x^6 - 1$ jest równy

- a) $(x-1)(x^5 + x^4 + \dots + 1)$
- b) $(x-1)(x+1)(x^4 + x^2 + 1)$
- c) $(x-1)(x+1)(x^4 + 1)$

3. (3pkt) Funkcja określona wzorem $f(x) = \frac{3x+6}{x+2}$

- a) ma jedno miejsce zerowe
- b) jej wykresem jest hiperbola
- c) $f(\sqrt{5}) = 3$

4. (3pkt) Ciąg określony wzorem $a_n = (n-3)(n-5)$:

- a) ma trzy wyrazy ujemne
- b) ma nieskończenie wiele wyrazów dodatnich
- c) ma nieskończenie wiele wyrazów ujemnych

5. (3pkt) Funkcja określona wzorem $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{dla } x \geq 0 \\ x^2 + 5x & \text{dla } x < 0 \end{cases}$

- a) ma cztery miejsca zerowe
- b) ma dwa miejsca zerowe całkowite
- c) ma jedno miejsce zerowe wymierne

6. (3pkt) Liczba $\left(\sqrt{\sqrt{7} + \sqrt{3}} + \sqrt{\sqrt{7} - \sqrt{3}}\right)^2$

- a) jest równa $2\sqrt{7}$
- b) jest równa $2\sqrt{7} + 4$
- c) należy do przedziału $(2^2, 2^3)$

7. (3pkt) Przez punkt $A(1,1)$ przechodzi prosta jednakowo odległa od punktów $B(2,4)$ i $C(-2,2)$, takich prostych mamy

- a) jedną
- b) dwie
- c) nieskończenie wiele

8. (3pkt) Pole rombu wynosi $8\sqrt{3}$, a promień okręgu wpisanego w ten romb ma długość $\sqrt{3}$, wobec tego

<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>

- a) kąt ostry ma miarę 30°
- b) bok rombu ma długość 4
- c) dłuższa przekątna rombu ma długość $4\sqrt{3}$

9. (3pkt) W kole o długości promienia R znajdują się 4 rozłączne koła każde o promieniu r . Wynika stąd, że

<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>

- a) $R > 4r$
- b) $R < 6r$
- c) $R > r(\sqrt{2} + 1)$

10. (3pkt) Dane są proste $3x - y - 2 = 0$ i $x + 3y - 3 = 0$. Wówczas

<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>

- a) istnieje prosta prostopadła jednocześnie do obu tych prostych
- b) istnieje trójkąt, którego dwa boki są zawarte w tych prostych
- c) istnieje romb, którego przekątne są zawarte w tych prostych

Część II

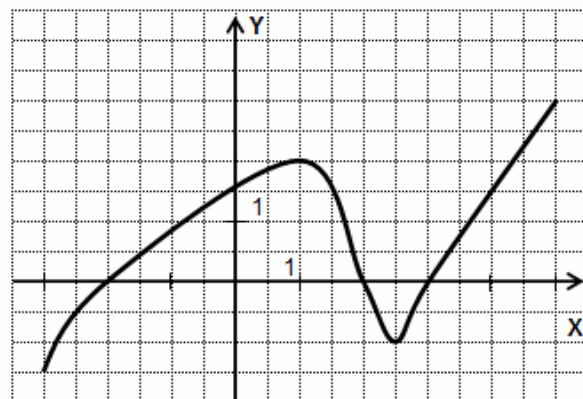
W części drugiej zapisz rozwiązania zadań w wyznaczonym miejscu.

11. (3pkt) Rozwiąż równanie $|x^3 + x^2 - 4x - 4| + |x^2 + 2x| = 0$.

12. (3pkt) Mistrz i jego dwaj pomocnicy kopią rów. W ciągu godziny każdy pomocnik wykonuje $\frac{2}{3}$ pracy wykonywanej w tym czasie przez mistrza. Sam mistrz kopałby rów w ciągu d godzin. W jakim czasie cała trójka wykopie rów?

13. (3pkt) Dany jest trapez ABCD o podstawach długości \overline{AB} i \overline{CD} . Przekątne \overline{AC} i \overline{BD} przecinają się w punkcie S. Wykaż, że $|SA| \cdot |SD| = |SB| \cdot |SC|$.

14. (3pkt) Dany jest wykres funkcji $f(x)$ dla $x \in \langle -3, 5 \rangle$. Rozwiąż nierówność $f(x) \cdot x < 0$.



15. (4pkt) Naszkicuj wykres funkcji $y = x^2 + 4x$, a następnie wykonując odpowiednie przekształcenia naszkicuj wykresy funkcji

- a) $f(x) = |x^2 + 4x|$
- b) $g(x) = (|x| - 5)^2 + 4(|x| - 5)$

16. (4pkt) Oblicz obwód trójkąta ABC, jeśli wiadomo, że kąt ACB jest prosty, odcinek \overline{CD} jest wysokością trójkąta poprowadzoną na przeciwprostokątną \overline{AB} , $|AC| = 4$ oraz $|DB| = 6$.