

**VII Powiatowy Konkurs Matematyczny  
dla uczniów klas pierwszych szkół ponadgimnazjalnych.**

## Część I

1. (3pkt) Dana jest funkcja  $f(x) = \frac{x^2 - 25}{x - 5}$ . Prawdą jest:

- a) Dziedzina funkcji  $f(x)$  jest zbiór  $D = \{5\}$   
 b) Miejscami zerowymi są liczby 5 i (-5)  
 c) Wykres przecina oś OY w punkcie (0,5)

2. (3pkt) Liczbą całkowitą jest

- a)  $a = \frac{2^{52} + 2^{50} + 2^{48}}{3}$   
 b)  $b = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{5}}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} - \sqrt{15}$   
 c)  $c = \frac{0,75 \cdot 2 \frac{2}{3} - 2^3}{2 \cdot (1 - 1\frac{1}{5})^0}$

3. (3pkt) Dane są zbiory  $A = \{x \in \mathbb{C} : x^2 < 12\}$  oraz  $B = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 4\}$ . Prawdą jest:

- a)  $A \cap B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$   
 b)  $A \cup B = (-4; 4)$   
 c)  $B \setminus A = \langle -4; -\sqrt{12} \rangle \cup \langle \sqrt{12}; 4 \rangle$

4. (3pkt) O której godzinie między  $23^{30}$  a północą stosunek liczby minut, których brakuje do północy, do liczby minut, które upłynęły od  $23^{30}$  jest równy  $\frac{1}{4}$ ?

- a) O godzinie  $23^{36}$   
 b) O godzinie  $23^{54}$   
 c) O godzinie  $23^{45}$

5. (3pkt) Dana jest funkcja liniowa  $f(x) = 2\sqrt{3} - \sqrt{3}x$ .

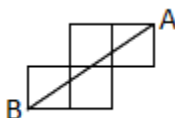
- a) Wykres funkcji  $f$  przechodzi przez I, II i IV ćwiartkę układu współrzędnych.  
 b) Miejsce zerowe funkcji  $f$  jest liczbą wymierną.  
 c) Funkcja  $f$  jest rosnąca

6. (3pkt) Funkcja  $f$  dana jest wzorem  $f(x) = x^2 - 4$ . Wobec tego, dla dowolnej liczby rzeczywistej  $m$ :

- a)  $f(m + 2) = m^2$   
 b)  $f(m + 2) = m^2 + 4m$   
 c)  $f(m + 2) = m^2 - 4$

7. (3pkt) Bok każdego z czterech kwadratów na rysunku ma długość 1. Długość odcinka AB wynosi:

- a)  $3\sqrt{2} - 1$   
 b)  $\sqrt{13}$   
 c)  $\sqrt{2} + \sqrt{5}$



8. (3pkt) Dwie kolejne obniżki cen towaru: pierwsza o 20% i druga o 30% można zastąpić jedną obniżką ceny tego towaru o:

a) 50%

b) 44%

c) 56%

9. (3pkt) Dla każdej liczby rzeczywistej  $a$ , liczba  $a^{10} \cdot a^{10}$  jest równa:

a)  $a^{100}$

b)  $(2a)^{10}$

c)  $\frac{(a^2)^{15}}{a^{10}}$

## Część II

10. (3pkt) W równoległoboku długości boków wynoszą 6 i 10, a kąt ostry ma miarę  $60^\circ$ . Oblicz długości obu wysokości i długość dłuższej przekątnej tego równoległoboku.

11. (3pkt) Zespół pracowników ma wykonać pewną pracę w ciągu określonej liczby godzin. Gdyby pracowników było o 4 więcej, to wykonaliby tę samą pracę o 2 godziny wcześniej. Gdyby ich było o 3 mniej, to pracowaliby o 5 godzin dłużej. Ilu było pracowników i ile godzin pracowali?

12. (3pkt) Narysuj wykres funkcji  $f(x) = \sqrt{x^2 - 10x + 25} - 1$

13. (4pkt) Uprość wyrażenie  $\frac{(a^3 - b^3)(a + b)}{(a^3 + b^3)(a - b)}$ , a następnie oblicz jego wartość dla

$$a = \sqrt{2} + 1 \text{ i } b = \sqrt{2} - 1.$$

14. (4pkt) Aby wyznaczyć liczby wymierne  $a$  i  $b$  takie, że  $\sqrt{6 + 2\sqrt{8}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ , można postąpić następująco:

*Podnosimy obie strony równania do kwadratu i otrzymujemy:*

$$6 + 2\sqrt{8} = a + 2\sqrt{a \cdot b} + b$$

*Stąd mamy układ równań:*

$$\begin{cases} a \cdot b = 8 \\ a + b = 6 \end{cases}$$

*Po rozwiązaniu układu równań otrzymujemy:*

$$\begin{cases} a = 4 \\ b = 2 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \end{cases}$$

$$\text{Zatem } \sqrt{6 + 2\sqrt{8}} = \sqrt{4} + \sqrt{2}$$

Postępując analogicznie, przedstaw w takiej postaci liczbę  $\sqrt{8 + 2\sqrt{15}}$

15. (4pkt) W partii 60 000 detali 3% stanowią detale wadliwe. Ile wadliwych detali należy usunąć, aby w pozostałych było mniej niż 2% detali wadliwych?

**16. (2pkt)** Wykaż, że jeżeli suma trzech liczb rzeczywistych (różnych od zera) wynosi 3 i suma odwrotności tych samych liczb wynosi  $\frac{1}{3}$ , to co najmniej jedna z tych liczb równa się 3.