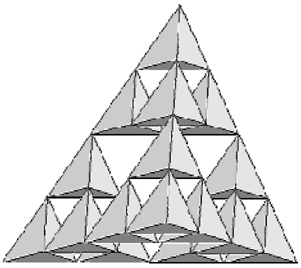
Kod ucznia:



Wodzisław Śl. 17.04.2013

XI Powiatowy Konkurs Matematyczny
dla uczniów klas drugich szkół ponadgimnazjalnych.

W tym konkursie nie ma przegranych. To, że tu jesteś, jest już Twoim sukcesem.
Więc „Jeśli zadanie wydaje ci się trudne, bierz się za niemożliwe”
Aleksander Wielki

W części pierwszej znajdują się zadania testowe.
W każdej kratce obok odpowiedzi wpisz TAK lub NIE
W części drugiej zapisz rozwiązanie każdego zadania.

Część I

1. **(4pkt)** Liczbą wymierną jest
   - a) $a = \sqrt[3]{54} - \sqrt{18}$
   - b) $b = 2,(3)$
   - c) $c = |\pi - 3{,}14|$
   - d) $d = \dfrac{1}{\sqrt[9]{512}}$

2. **(4pkt)** Niech $x = 10^{10}$ oraz $y = 20^5$ wtedy
   - a) $x \cdot y = 200^{15}$
   - b) $\dfrac{y}{x} = 5^{-5}$
   - c) $x + y = 20^5 \cdot 26$
   - d) $x^y = 10^{200^5}$

3. **(4pkt)** Dla każdej liczby rzeczywistej *x* oraz *y* prawdziwa jest równość
   - a) $|x + y| = |x| + |y|$
   - b) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
   - c) $|x| = x$
   - d) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$

4. **(4pkt)** Przedział obustronnie domknięty $\langle a; b\rangle$ zawiera dokładnie cztery liczby naturalne, wynika stąd, że
   - a) $b - a > 4$
   - b) $b - a \geq 3$
   - c) $b - a < 5{,}9$
   - d) $b - a < 6$

5. **(4pkt)** Niech $x^2 - y^2 = 1 + \sqrt{2}$ oraz $x - y = 2 - \sqrt{2}$. Więc $x + y$ wynosi
   - a) $2 + 1{,}5\sqrt{2}$
   - b) $2 + 3\sqrt{2}$
   - c) $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$
   - d) $1 - \sqrt{2}$

6. **(4pkt)** Pierwiastkiem wielomianu $W(x)=x^4+2x^3-5x^2-4x+6$ jest liczba

- [ ] a) $x=\sqrt{2}$
- [ ] b) $x=1$
- [ ] c) $x=2$
- [ ] d) $x=0$

7. **(4pkt)** Wielomian $x^{16}-1$ jest podzielny przez wielomian

- [ ] a) $x-1$
- [ ] b) x^8+1
- [ ] c) x^3-x^2+x-1
- [ ] d) x

8. **(4pkt)** Dana jest funkcja $f(x)=\dfrac{1}{x^2+2x+m}$, której dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych, więc parametr *m* może być równy

- [ ] a) 0
- [ ] b) 1
- [ ] c) 2
- [ ] d) 3

9. **(4pkt)** Dla dowolnych różnych liczb *a* oraz *b* liczba $\dfrac{a}{a-b}+\dfrac{b}{b-a}$ jest równa

- [ ] a) 1
- [ ] b) $\dfrac{2ab-a^2+b^2}{(a-b)(b-a)}$
- [ ] c) $\dfrac{a+b}{a-b}$
- [ ] d) nie zależy od wartości *a* oraz *b*

10. **(4pkt)** Najmniejszym wspólnym mianownikiem dla wyrażenia

$\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{1}{x^2-x}$ jest

- [ ] a) x^2
- [ ] b) $x^2(x-1)(x+1)(x^2-x)$
- [ ] c) x^4-x^2
- [ ] d) $x(x-1)(x+1)x$

Kod ucznia:

11. **(4pkt)** W zbiorze rozwiązań nierówności $-x^2+2x+3\geq 0$

- [ ] a) są tylko dwie liczby całkowite
- [ ] b) nie ma rozwiązań nierówności $x^2>9$
- [ ] c) jest nieskończenie wiele liczb całkowitych
- [ ] d) jest tylko jedna liczba całkowita ujemna

12. **(4pkt)** Wykres funkcji $y=\sqrt{2}x^2-5x+\frac{1}{2}$ może mieć z pewnym okręgiem

- [ ] a) jeden punkt wspólny
- [ ] b) dwa punkty wspólne
- [ ] c) trzy punkty wspólne
- [ ] d) cztery punkty wspólne

13. **(4pkt)** Zbiór liczb rzeczywistych jest dziedziną funkcji

- [ ] a) $y=\sqrt{x^2}-|x|$
- [ ] b) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2}+1}$
- [ ] c) $y=\dfrac{|x|}{\sqrt{x^2}}$
- [ ] d) $y=\dfrac{x^2}{|x|+1}$

14. **(4pkt)** O funkcji $y=f(x)$ wiadomo tylko, że jest rosnąca w zbiorze liczb rzeczywistych. Czy można stąd wnioskować, że rosnąca jest także funkcja

- [ ] a) $y=f(x+2)-3$
- [ ] b) $y=-f(-x)$
- [ ] c) $y=|f(x)|$
- [ ] d) $y=(f(x))^2$

15. **(4pkt)** W trójkącie prostokątnym długości przyprostokątnych wynoszą 3 i 4. Prawdą jest, że

- [ ] a) trójkąt o takich wymiarach nazywamy trójkątem egipskim
- [ ] b) promień okręgu opisanego na tym trójkącie ma długość 5
- [ ] c) wysokość opuszczona z wierzchołka kąta prostego wynosi $\frac{12}{5}$
- [ ] d) sinus najmniejszego kąta w tym trójkącie wynosi $\frac{3}{5}$

Część II

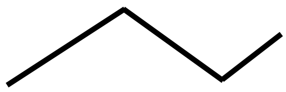
16. **(3pkt)** Wykaż, że równanie $\sqrt{3}x^3 - x^2 + 3x - \sqrt{3} = 0$ ma dokładnie jedno rozwiązanie.

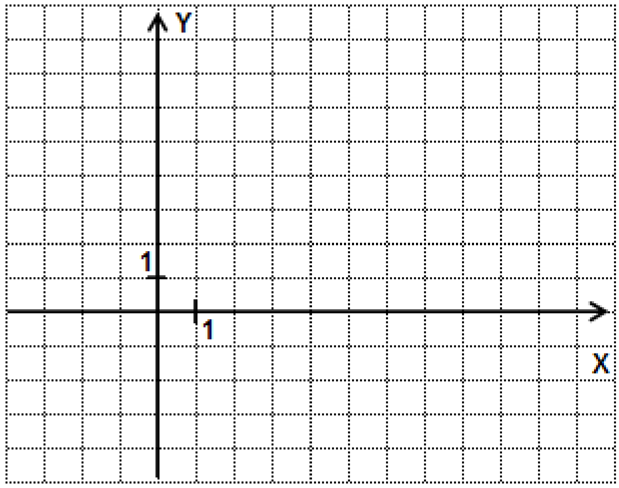
17. **(5pkt)** Oblicz wartość liczb *a* i *b* tak, aby wykres funkcji f(x) był łamaną.

$$f(x) = \begin{cases} ax + 1{,}5 & dla \quad x \in \langle -2; 2\rangle \\ 2x - 3 & dla \quad x \in (2; 5\rangle \\ b & dla \quad x \in (5; 9\rangle \end{cases}$$

. Dla znalezionych wartość *a* i *b* narysuj wykres funkcji.

Przypominamy: łamana to figura geometryczna składająca się z odcinków takich, że koniec jednego odcinka jest jednocześnie początkiem następnego odcinka, np. patrz rysunek obok.





Kod ucznia:

18. **(6pkt)** Podstawy trapezu *ABCD* mają długość: $|AB| = 12$ i $|DC| = 8$**,** a wysokość 6.
Przekątne trapezu przecinają się w punkcie *E*. Oblicz odległość punktu *E* od podstaw trapezu i pole trójkąta *AED.*

19. **(6pkt)** Dane są dwa okręgi zewnętrznie styczne o promieniach 1 i 3 oraz prosta, która jest jednocześnie styczna do obydwu okręgów (do każdego okręgu w innym punkcie). Te trzy figury ograniczają pewien obszar. Oblicz pole tego obszaru.

20. **Poziom rozszerzony (6pkt)** Uzasadnij równość $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$, a następnie przy jej pomocy uzasadnij, że nie istnieje liczba całkowita spełniająca nierówność $\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}<0$.

21. Odpowiedzi

Zad1	Zad2	Zad3	Zad4	Zad5	Zad6	Zad7	Zad8	Zad9	Zad10	Zad11	Zad12	Zad13	Zad14