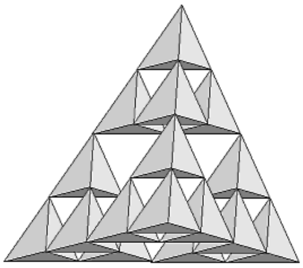
Wodzisław Śl. 14.04.2014



XII Powiatowy Konkurs Matematyczny
dla uczniów klas pierwszych szkół ponadgimnazjalnych.

W tym konkursie nie ma przegranych. To, że tu jesteś, jest już Twoim sukcesem. Więc „Jeśli zadanie wydaje ci się trudne, bierz się za niemożliwe” *Aleksander Wielki*

W części pierwszej znajdują się zadania testowe. W każdej kratce obok odpowiedzi wpisz TAK lub NIE W części drugiej zapisz rozwiązania zadania.

1. (4pkt) Prawdą jest, że poniższa liczba jest naturalna

a) $\dfrac{25^{50}-125^{40}}{5^{100}}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\sqrt{3}-\sqrt{2}$

c) $\sqrt{4-2\sqrt{3}}\cdot\sqrt{4+2\sqrt{3}}$

d) $\dfrac{\frac{8}{5}}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}}}}$

2. (4pkt) Dane są zbiory $A=\{x\in R:|x-1|\leq 1\}$ oraz $B=\{x\in N: x^3\leq 10\}$. Wtedy

a) $A\subset B$
b) $A\cap B$ jest zbiorem trzyelementowym
c) $A\cup B$ jest zbiorem mającym skończoną ilość elementów
d) $B\setminus A=\varnothing$

3. (4pkt) Dana jest funkcja liniowa $f(x)=|3m-1|x+4$, gdzie m jest parametrem. Wtedy

a) miejsce zerowe funkcji wynosi x=-4 tylko dla parametru $m=\dfrac{2}{3}$

b) funkcja f jest rosnąca dla każdej liczby rzeczywistej m

c) dla $m=\dfrac{1}{3}$ funkcja przyjmuje wartości nieujemne

d) punkt przecięcia z osią OY nie zależy od wartości parametru m

4. (4pkt) Liczba $2^{10}+5\cdot2^{8}-9\cdot2^{6}+2^{5}$ jest:

a) parzysta
b) podzielna przez 11
c) nie większa niż 1700
d) podzielna przez 10

5. (4pkt) Dana jest funkcja $f(x) = \frac{x^2-4}{\sqrt{x-2}}$.

a) Dziedziną tej funkcji jest zbiór $\langle 2; \infty)$.
b) Istnieje argument x, dla którego wartość funkcji wynosi 0.
c) $f(\sqrt{5})$ jest liczbą dodatnią.
d) Miejscem zerowym tej funkcji jest (–2).

6. (4pkt) Czy podane niżej równanie ma rozwiązanie?

a) $\left||x-1|+2\right| = 0$
b) $\left||x-1|+2\right| = 2$
c) $|x| + 1 = 1$
d) $2 + \sqrt{(x+3)^2} = 0$

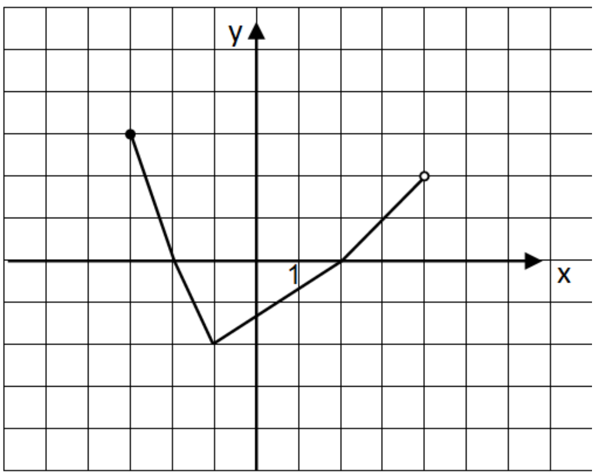
7. (4pkt) Dodatnią liczbę całkowitą n zwiększono o 50%, a następnie wynik zmniejszono o 50%. W rezultacie otrzymano liczbę całkowitą m. Wynika z tego, że:

a) m = n
b) Liczba n jest podzielna przez 4
c) Liczba m jest podzielna przez 3
d) Liczbę m można zapisać jako 0,75n

8. (4pkt) Istnieją takie różne liczby pierwsze p i q, że:

a) $p \cdot q + 1$ jest liczbą pierwszą
b) $p \cdot q + 1$ jest liczbą złożoną
c) $p - q$ jest liczbą złożoną
d) $p + q$ jest liczbą pierwszą

9. (4pkt) Na wykresie przedstawiono wykres funkcji y = f(x). Zatem:



a) Dziedziną funkcji y = f(x-2) jest zbiór $\langle -5; 2)$
b) Funkcja y = f(x) + 2 ma jedno miejsce zerowe
c) Równanie f(|x|) = -1 ma dwa rozwiązania
d) Funkcja y = |f(x – 2)| przyjmuje tylko wartości dodatnie

10. (4pkt) Dana jest funkcja

$$f(x) = \begin{cases} 2x+2 & dla \quad x \in \langle 1;3 \rangle \\ 3 & dla \quad x \in (-3;1) \\ 2x+9 & dla \quad x \in \langle -5;-3 \rangle \end{cases}$$

. Prawdą jest, że

a) $D = R$
b) $Y = \langle -1;8 \rangle$
c) Liczba -1 jest miejscem zerowym tej funkcji

d) *f(0)=2*

11. (4pkt) Kwadrat wyrażenia $3\sqrt{2}x^3 - 2\sqrt{3}x^5$ jest równy

a) $18x^6 + 12x^{10}$

b) $9\sqrt{2}x^6 - 6\sqrt{6}x^8 + 4\sqrt{3}x^{10}$

c) $18x^6 - 12\sqrt{6}x^8 + 12x^{10}$

d) $6x^6\left(2x^4 - 2\sqrt{6}x^2 + 3\right)$

12. (4pkt) Dana jest funkcja $f(x) = 2x + 5$. Równanie $f(x+2) - f(x) = f(4x) + 7$ jest równoważne równaniu:

a) $2(x+2) - 2x - 5 = 8x + 5 + 7$

b) $2(x+2) + 5 - 2x - 5 = 4x + 5 + 7 + 4x$

c) $-8x = 8$

d) $x + 2 - 2x - 5 = 4x + 5 + 7$

13. (4pkt) Między liczbami *a, b, c, d* zachodzi związek $a^2 - b\left(\sqrt{c} - d\right) = 1$, wobec tego

a) $a = \sqrt{b\left(\sqrt{c} - d\right) + 1}$

b) $b = \dfrac{1 - a^2}{d - \sqrt{c}}$

c) $c = \dfrac{a^2 - 1}{b} + d$

d) $d = \dfrac{1 - a^2}{b} + \sqrt{c}$

14. (4pkt) Czy podana definicja jest poprawna?

a) Układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi nazywamy nieoznaczonym (tożsamościowym) wtedy i tylko wtedy, gdy każda para liczb go spełnia.

b) Miejscem zerowym funkcji nazywamy punkt przecięcia jej wykresu z osią ox.

c) Liczbą złożoną nazywamy każdą liczbę naturalną, która ma parzystą liczbę dzielników.

d) Wartością bezwzględną liczby ujemnej nazywamy liczbę do niej odwrotną.

15. (4pkt) Czy prawdą jest, że

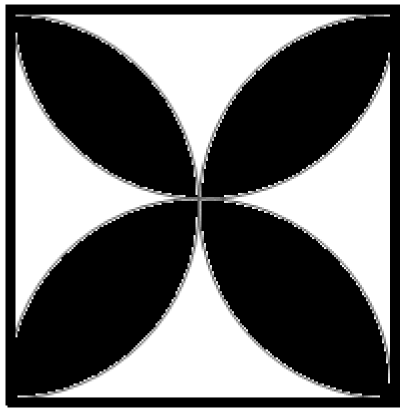
a) Istnieje wielokąt, który ma tyle samo boków co przekątnych.

b) Istnieje kwadrat i koło o tym samym polu.

c) Istnieją dwa trapezy o różnej sumie kątów.

d) Istnieją dwa prostokąty o różnych obwodach, ale mające przekątne tej samej długości.

16. (4pkt) W kwadracie o boku długości *a* narysowano półokręgi oparte na czterech jego bokach jak pokazano na rysunku. Nakładające się części półkoli tworzą cztery zacieniowane „płatki”. Oblicz pole zacieniowanego obszaru



17. (4pkt) Funkcje liniowe określone wzorami y = –2x + b i y = ax – 1 mają takie samo miejsce zerowe. Uzasadnij, że a · b = 2.
18. (2pkt) Wykaż, że liczba postaci $3^n + 3^{n+1} + 3^{n+2} + 3^{n+3}$ jest podzielna przez 5 dla każdego n∈N.
19. (4pkt) Rowerzysta jedzie z miejscowości A do odległej o 48 km miejscowości B. Gdyby zwiększył swoją prędkość o x kilometrów na godzinę, to jechałby 240 minut, gdyby zaś zmniejszył swoją prędkość o x kilometrów na godzinę, to jechałby 6 godzin. Oblicz prędkość rowerzysty
20. (3pkt) Okręgi rozłączne zewnętrznie o środkach S_1 i S_2 mają taki sam promień długości 24 cm. Okręgi te przecinają odcinek S_1S_2 w dwóch punktach, dzieląc go na trzy równe części. Oblicz długość promienia trzeciego okręgu o środku S_3 i stycznego do obu okręgów oraz do odcinka S_1S_2.
21. (3pkt)Dane są liczby $a = \frac{10^{2013}+1}{10^{2014}+1}$ i $b = \frac{10^{2014}+1}{10^{2015}+1}$. Zbadaj, czy liczba a jest większa od liczby b.