III Powiatowy Konkurs Matematyczny

Zadania dla uczniów klas drugich szkół ponadgimnazjalnych

27 kwietnia 2005r.

Zadania	1 (3 p)	2 (3 p)	3 (3 p)	4 (4 p)	5 (3 p)	6 (4 p)	7 (4 p)	8 (3 p)	9 (5p)	10 (6p)	Razem
Punkty											

Numer kodowy

Przy pomocy matematyki, tworu swego niedoskonałego umysłu, człowiek zmierzył przestrzeń tak wielką, że nie może jej objąć wyobraźnią.
M.Kline

Rozwiąż zadania. Zapisz rozwiązania w miejscu do tego przeznaczonym. *Czas prasy: 120 minut.*

Życzymy powodzenia!

Zadanie 1. *(3 pkt)*
Smok ma 2000 głów. Rycerz może ściąć jednym cięciem miecza 33 głowy, 21 lub 17 głów lub 1 głowę. Smokowi dorastają wówczas odpowiednio 48, 0, 14 lub 349 głów. Smok zostanie zabity, gdy wszystkie głowy będą ścięte. Czy rycerz może zabić smoka? Odpowiedź uzasadnij.
Rozwiązanie

Zadanie 2. (3 pkt)

Udowodnij, że dla dowolnych dodatnich liczb a, b zachodzi nierówność: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Zadanie 3. (3 pkt)
W równoległoboku o bokach długości 5 cm i 6 cm symetralna dłuższego boku zawiera jeden z wierzchołków równoległoboku. Oblicz pole równoległoboku.

Zadanie 4. (4 pkt)
Wykaż, że jeżeli trapez równoramienny o podstawach różnej długości jest opisany na okręgu, to długość jego wysokości jest równa średniej geometrycznej(*) długości jego podstaw.

(*) Średnią geometryczną dwóch liczb nieujemnych a, b nazywany liczbę $\sqrt{ab}$.

Zadanie 5. **(3 pkt)**

Wielomian W(x) jest wielomianem stopnia trzeciego. Zbiorem rozwiązań nierówności $W(x) \geq 0$ jest zbiór $\left(-\infty,-1\right\rangle \cup \left\langle 1,3\right\rangle$. Zapisz wielomian W(x) w postaci iloczynu czynników liniowych, wiedząc, że $W(0) = -3$.

Zadanie 6. **(4 pkt)**

Ania postanowiła codziennie uprawiać aerobik. Ustaliła, że pierwszego dnia będzie ćwiczyła 15 minut, a każdego następnego dnia czas uprawiania aerobiku będzie zwiększać o 5 minut.

a) Którego dnia Ania będzie ćwiczyć 1,5 godziny?
b) Ile kcal w sumie spali Ania od dnia pierwszego do dnia obliczonego w punkcie a) , jeśli średnio w czasie 1 godziny aerobiku spala się 300 kcal?

<u>Zadanie 7.</u> (4 pkt)
Dla jakich wartości parametru m zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności $(x^2-4)(x^2-2m)<0$ jest przedział $(-2,2)$? Odpowiedź uzasadnij.

<u>Zadanie 8.</u> (3 pkt)
Pierwiastki równania $x^4-2x^3+2x^2-x-2=0$ można wyznaczyć w następujący sposób:

$x^4-2x^3+2x^2-x-2=0 \Leftrightarrow (x^2-x)^2+(x^2-x)-2=0$

$t=x^2-x$

$t^2+t-2=0 \Leftrightarrow t=1 \vee t=-2$

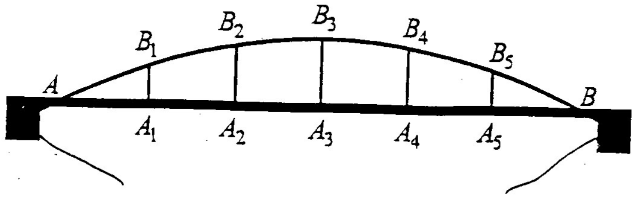
$x^2-x=1 \Leftrightarrow x^2-x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \vee x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$x^2-x=-2 \Leftrightarrow x^2-x+2=0$ równanie nie ma pierwiastków.

Odp.: Pierwiastkami równania są liczby $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ i $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Stosując opisany sposób, rozwiąż równanie $x^4+6x^3+11x^2+6x-3=0$.

<u>Zadanie 9.</u> (5 pkt)



Przęsło mostu przedstawione na rysunku ma kształt części paraboli, której wierzchołek znajduje się w jego środku. Pomost (jezdnia) podtrzymywany jest przez pięć pionowych wieszaków rozmieszczonych w równych odstępach, z których najdłuższy $|A_3B_3| = 13{,}5m$. Oblicz długości poszczególnych wieszaków wiedząc, że długość mostu $|AB| = 108m$.

<u>Zadanie 10.</u> (6 pkt)

Narysuj wykres funkcji: $f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & dla \quad x \le 0 \\ |x^2 - 1| & dla \quad x > 0 \end{cases}$ i z jego pomocą ustal, dla jakich rzeczywistych wartości parametru m równanie $f(x) = m$ ma trzy różne rozwiązania.

Brudnopis