I Powiatowy Konkurs Matematyczny
dla uczniów klas pierwszych szkół ponadgimnazjalnych
28 kwietnia 2003

W tym konkursie nie ma przegranych. To, że tu jesteś, jest już Twoim sukcesem.
Więc *„Jeśli zadanie wydaje ci się trudne, bierz się za niemożliwe”*
Aleksander Wielki

W części I masz zadania testowe, w których zakreślasz prawidłową odpowiedź (niekoniecznie jedną).
W części II podajesz prawidłowe odpowiedzi.
W części III zapisujesz rozwiązania zadań.

Czas pracy 120 minut.

Część I

Zadanie 1 (2 pkt)

Liczba x jest większa od liczby y o 50%. Zatem liczba y jest mniejsza od liczby x

a) także o 50%

b) o 100%

c) o $33\frac{1}{3}\%$

Zadanie 2 (2 pkt)

Dwie osoby oprawiają obrazy; pierwsza oprawia obraz w ciągu 30 minut, a druga w ciągu 25 minut. Rozpoczynają pracę o godzinie $8^{\underline{00}}$. Stąd wynika, że pierwszy raz skończą jednocześnie oprawiać obraz

a) o $9^{\underline{30}}$

b) przed $12^{\underline{00}}$

c) o $10^{\underline{30}}$

Zadanie 3 (2 pkt)

Wartość wyrażenia $4^{100}+4^{100}+4^{100}+4^{100}$ jest równa

a) 4^{400}

b) 4^{101}

c) 16^{100}

Zadanie 4 (2 pkt)

Jacek biegł przez pół godziny z prędkością 3 km/h, a potem przez 45 minut z prędkością 2 km/h. Jego średnia prędkość na całej trasie wynosiła:

a) 2,4 km/h

b) 2,5 km/h

c) $24 \cdot 10^{-1}$ km/h

Zadanie 5 (2 pkt)

Która z liczb, dla każdego $n \geq 4$, jest podzielna przez 6

a) $n^2 + n$

b) $n^3 + n$

c) $n^3 - n$

Zadanie 6 (2 pkt)

Wyrażenie $\frac{\sqrt{x^2 + 2x + 1}}{|x+1|} \cdot \frac{|5-2x|}{|2x-5|} \cdot |x|$ jest równe

a) $|x|$

b) $-x \; dla \; x \in (-\infty; -1)$

c) $\begin{cases} -x & dla \quad x \in (-\infty; 0) \setminus \{-1\} \\ x & dla \quad x \in \langle 0; +\infty) \setminus \left\{\frac{5}{2}\right\} \end{cases}$

Zadanie 7 (2 pkt)

Liczba $-\sqrt{3}$ jest miejscem zerowym funkcji

a) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x}} + 1$

b) $f(x) = -9 - \sqrt{27}x$

c) $f(x) = \frac{\sqrt{18} + \sqrt{6}x}{\sqrt{2}}$

Zadanie 8 (2 pkt)

Czy wewnątrz kwadratu o boku 6 można umieścić prostokąt (wierzchołki mogą leżeć na obwodzie kwadratu) o bokach

a) 0,5 i 9

b) 7 i 1

c) 1,4 i 6,1

Część II

Zadanie 9 (6 pkt)

Sprawdź, czy podane liczby są całkowite.

$$a = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4}}}$$

$$b = \frac{2}{3}\% \cdot 1{,}5$$

$$c = \sqrt{\left(\sqrt{5} - 3\right)^2} + 3$$

$$d = \sqrt{12 - 2\sqrt{35}} - \sqrt{7} + \sqrt{5}$$

$$e = \frac{4}{3 - \sqrt{5}} - \sqrt{5}$$

$$f = \left(\frac{2}{3}\right)^0 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}$$

Odp. Następujące liczby są całkowite: ....

Zadanie 10 (4 pkt)

Logiczna łamigłówka

Trzej bracia: Bartek, Maciek i Tomek łowili ryby. Zapytani o to, ile ryb złowili każdy z nich odpowiedział.

a) Bartek złowił 22 ryby i Maciek złowił 21 ryb
b) Tomek złowił 19 ryb i Bartek 21 ryb
c) Tomek złowił 21 ryb i Maciek złowił 18 ryb

Wiadomo, że w każdej odpowiedzi tylko jedna jej część jest prawdziwa oraz że żadni dwaj chłopcy nie złowili tej samej liczby ryb. Ile ryb złowił każdy z chłopców?

Odp. ....

Zadanie 11 (6 pkt)

Oceń prawdziwość zdań. Wskaż zdania prawdziwe.

a) Zbiór wszystkich liczb naturalnych podzielnych przez 6 jest podzbiorem zbioru liczb naturalnych podzielnych przez 12

b) $\left(4-\sqrt{14}\right)\left(4+\sqrt{14}\right)$ jest liczbą pierwszą i $4^{1-\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}=4$

c) $\left(\sqrt{4^2+5^2}=9\right) \Rightarrow \left(2^3>3^2\right)$

d) Trójkąt o bokach długości 5, 12, 13 jest ostrokątny $\Leftrightarrow$ trójkąt o bokach 3, 4, 5 jest ostrokątny.

e) Jeżeli kwadrat liczby naturalnej ma cyfrę jedności równą 1, to ta liczba ma także cyfrę jedności równą 1.

f) Każdy trójkąt ma co najmniej dwa kąty ostre lub w każdym trójkącie trzy dwusieczne przecinają się w jednym punkcie.

Odp. Następujące zdania są prawdziwe: ....

Zadanie 12 (6 pkt)

Symbol $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x, tzn. największą liczbę całkowitą nie przekraczającą x. Np. $[3{,}14]=3$, $[-3{,}14]=-4$. Wskaż zdania prawdziwe

a) Dla każdej liczby całkowitej x zachodzi $[x]=x$.

b) Gdy w zapisie liczby x występuje przecinek, to $[x]$ jest równa liczbie przed przecinkiem.

c) Dla każdej liczby całkowitej zachodzi równość $[|x|]=|\,[x]\,|$.

d) Dla każdej ujemnej niecałkowitej liczby x zachodzi równość $[|x|]=|\,[x]\,|-1$.

e) Istnieje taka liczba x, że $[x]=2[x]$.

f) Wyrażenie $\dfrac{1}{[x]+0{,}5}$ jest określone dla $x\in R$.

Odp. Następujące zdania są prawdziwe: ....

Część III

Zadanie 13 (4 pkt)
Uzupełnij podany tekst:

Chcemy sprawdzić, czy prawdziwa jest nierówność: $\frac{1}{2}(a+b) \geq \sqrt{ab}\ (*)$ dla dowolnych $a > 0\ i\ b > 0$.

Mnożymy nierówność stronami przez 2, $a+b \geq ....(**)$ i przenosimy wyrażenie z prawej strony na lewą: $.......................... \geq 0(***)$.

Po lewej stronie nierówności mamy kwadrat różnicy: $(\sqrt{a} - ....)^2 \geq 0$. Ostatnia nierówność jest zawsze prawdziwa, zatem prawdziwa jest także nierówność (***), następnie nierówność (**) i nierówność (*), której prawdziwości chcieliśmy dowieść.

Wykorzystując udowodnioną nierówność (*), wykaż prawdziwość nierówności: $(1+x)(1+y) \geq 4$ dla wszystkich liczb rzeczywistych x i y, takich, że $xy = 1$. W tym celu
Przyjmijmy $a = 1, b = x$ i podstawmy do nierówności (**). Otrzymamy:

....

Powtórzmy to samo dla y:

....

Pomnóżmy stronami obie nierówności.

....

Wykorzystując warunek w założeniu otrzymujemy:

....

Zadanie 14 (4 pkt)
W pewnej szkole 85% uczniów uczy się języka niemieckiego, 75% uczniów uczy się języka angielskiego, a obu języków uczy się 120 uczniów. Ilu uczniów chodzi do tej szkoły ? Jaki procent uczniów tej szkoły uczy się obu języków? Ilu uczniów uczy się tylko języka niemieckiego? (Zakładamy, że każdy uczeń tej szkoły uczy się co najmniej jednego języka obcego)
Rozwiązanie:

Zadanie 15 (4 pkt)

a) Wiedząc, że $\max(a,b)=\begin{cases} a & dla \quad a \geq b \\ b & dla \quad a < b \end{cases}$ narysuj wykres funkcji $f(x)=\max(1,x)$.

b) Wiedząc, że $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & dla \quad x>0 \\ 0 & dla \quad x=0 \\ -1 & dla \quad x<0 \end{cases}$ narysuj wykres funkcji $g(x)=3\operatorname{sgn} x+2$.

Zadanie 16 (4 pkt)

a) Rozwiąż równanie $\sqrt{5}x - \sqrt{5} = x + 1$

b) Rozwiąż nierówność $\left||x-1|-2\right| > 3$.

Zadanie 17 (4 pkt)

Dobierz liczby a, b i c tak, aby rozwiązanie równania $|x-a|+|x-b|=c$ było

a) zbiorem jednoelementowym
b) zbiorem dwuelementowym
c) zbiorem pustym
d) przedziałem $\langle a;b\rangle$